ZUR QUANTENTHEORIE DER MAGNETISCHEN WIDERSTANDSÄNDERUNG

Teil I : Elektron-Störstellen-System
Teil II Elektron-Phonon-System

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Eike Bangert
aus Hannover

Göttingen 1968

1967

Fotodruck: Offsetdruckerei Andreas Funke
34 Göttingen, Wendenstraße 5b

ZUR QUANTENTHEORIE DER MAGNETISCHEN WIDERSTANDSÄNDERUNG

Teil I : Elektron-Störstellen-System
Teil II Elektron-Phonon-System

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Eike Bangert
aus Hannover

Göttingen 1968

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent: Doz.Prof. J. Hajdu
Korreferent: Prof. G. Lüders

Tag der mündlichen Prüfung: 26.6. 1967

Zur Quantentheorie der magnetischen Widerstandsänderung*

I. Elektron-Störstellen-System

EIKE BANGERT
Institut für theoretische Physik der Universität Göttingen

Eingegangen am 8. April 1968

On Quantum Theory of Galvanomagnetic Effects

I. Electron-Impurity-System

Considering a system of free electrons and randomly fixed impurities in a homogenious magnetic field, a derivation of a Titeica-type-formula for the transvers electrical conductivity is given. This formula holds for all magnetic field strengths and powers of the density of impurities. The derivation avoids an ergodic hypothesis for bounded variables which is used by KUBO and coworkers. Also, a transport equation is derived, correct to the first power of the impurity density, from which the conductivity parallel to the magnetic field may be calculated. In both cases singularities which arise in the Born approximation are removed by t-matrix approximations.

1. Einleitung und Übersicht

Berechnet man die elektrische Leitfähigkeit eines Systems von freien Elektronen und festen Störstellen im Magnetfeld in der niedrigsten störungstheoretischen Näherung (Bornsche Näherung), so kommt man zum unphysikalischen Ergebnis, daß die Leitfähigkeit senkrecht zum Magnetfeld (transversale Leitfähigkeit) als Funktion des reziproken Magnetfeldes unendlich wird und die Leitfähigkeit in Richtung des Magnetfeldes (longitudinale Leitfähigkeit) periodisch verschwindet**. Bereits DAVYDOV und POMERANCHUK[1] haben darauf hingewiesen, daß sich diese unphysikalischen Resultate durch Berücksichtigung höherer dämpfungstheoretischer Korrekturen beseitigen lassen.

In den letzten Jahren konnte dieses Programm durch eine Reihe Autoren mehr oder weniger streng und allgemein ausgeführt werden. KAHN[2] konnte zeigen, daß sich die Singularitäten der transversalen Leitfähigkeit bzw. die Nullstellen der longitudinalen Leitfähigkeit bei δ-förmigen Störstellen einfach beseitigen lassen, wenn man in die Titeica-Formel bzw. in die Boltzmann-Bloch-Gleichung Übergangswahrscheinlichkeiten in einer t-Matrix-Näherung einsetzt. Ähnliche Überlegungen

* D 7.

** In den Arbeiten [1–5] wird dieser Sachverhalt mathematisch und physikalisch ausführlich dargelegt.

[1] DAVYDOV, B., and I. POMERANCHUK: J. Phys. U.S.S.R. **2**, 147 (1940).

[2] KAHN, A.H.: Phys. Rev. **119**, 1189 (1960).

stammen von BYCHKOV[3]. Die bisher erwähnten Theorien[1-3] haben stark intuitive Züge. Die erste systematische Theorie wurde von SKOBOV[4] entwickelt. Dieser Autor geht von der Kubo-Formel aus und führt sie nach einigen zum Teil undurchsichtigen Näherungen auf eine stark spezialisierte Form der t-Matrix zurück.

Eine sehr lehrreiche Studie über die Beseitigung der Singularitäten in der transversalen Leitfähigkeit stammt von KUBO u. Mitarb.[5]. Auch diese Autoren gehen von der Kubo-Formel aus und leiten daraus eine sehr allgemeine Formel für die transversale Leitfähigkeit ab. Diese Formel hat die gleiche Gestalt wie die bekannte Titeica-Formel, enthält aber die allgemeine Übergangswahrscheinlichkeit, ausgedrückt durch die T-Matrix. Die Ergebnisse von KAHN, BYCHKOV und SKOBOV lassen sich aus dieser Formel als Spezialfälle gewinnen.

In der von KUBO u. Mitarb. gegebenen Ableitung dieser verallgemeinerten Form der Titeica-Formel wird von einer (von KUBO u. Mitarb. bereits früher eingeführten) Ergodizitätsannahme für beschränkte Variable Gebrauch gemacht. Zwar ist diese Ergodizitätsannahme sehr einleuchtend, sie wurde bisher nicht bewiesen. Einige Autoren[6] sehen sie nur für starke Magnetfelder ($\Omega\tau \gg 1$) als gültig an.

In der vorliegenden Arbeit wird die von KUBO u. Mitarb. gefundene allgemeine Formel für die transversale Leitfähigkeit aus der Kubo-Formel (2. Abschnitt) abgeleitet durch geeignete Umformungen mit Hilfe des optischen Theorems (3. Abschnitt). Die Ableitung zeigt, daß diese Formel für beliebige endliche Magnetfelder, für beliebige Störstellenpotentiale und Störstellendichte gilt.

Ferner wird für den longitudinalen Fall, der bisher nicht systematisch untersucht wurde, eine Transportgleichung abgeleitet (4. Abschnitt). Sie hat die gleiche Gestalt wie die Boltzmann-Bloch-Gleichung, enthält aber Übergangswahrscheinlichkeiten höherer Ordnung (alle Beiträge proportional der Störstellendichte werden berücksichtigt). Die longitudinale Leitfähigkeit, die durch Lösen dieser Gleichung berechnet wird, zeigt keine Nullstelle mehr.

Im folgenden zweiten Teil dieser Arbeit befassen wir uns mit dem Elektron-Phonon-System.

---

[3] BYCHKOV, YU. A.: Soviet Phys. JETP **12**, 483 (1961).

[4] SKOBOV, V.G.: Soviet Phys. JETP **10**, 1039 (1960). Soviet Phys. JETP **11**, 941 (1960).

[5] KUBO, R., S.I. MIYAKE, and N. HASHITSUME: SSP **17**, 269 (1965).

[6] BARYAKTAR, V.G., and S.V. PELETMINSKIJ: Soviet Phys. JETP **21**, 126 (1965).

2. Ausgangspunkt

Wir betrachten ein System von freien Elektronen und festen, statistisch verteilten Störstellen mit dem Hamiltonoperator

$$H=\frac{1}{2m}\sum_i\left(p_i+\frac{e}{c}A(r_i)\right)^2+\sum_i\sum_{k=1}^{N_S}u(r_i-R_k)$$

$$\equiv\sum_i H^i=\sum_i(H_0^i+U^i)=H_0+U, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,A(r)=B=(0,0,B).$$

Der Tensor der elektrischen Leitfähigkeit wird durch die Kubo-Formel

$$\sigma_{jk}(\omega)=\frac{1}{V}\int_0^\infty dt\,e^{-i\omega t}\int_0^\beta d\lambda\langle j_j(-i\hbar\lambda)\,j_k(t)\rangle \tag{2}$$

gegeben[5]. Sie läßt sich, da H eine Summe von Einelektron-Operatoren ist, auf eine einfachere Gestalt bringen, die im statischen Fall ($\omega=0$)

$$\sigma_{jk}=\frac{e^2\hbar}{4\pi V}\int_{-\infty}^{+\infty}dE\left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right)\mathrm{Sp}\{A(E)\,v_j\,A(E)\,v_k\} \tag{3}$$

lautet[5,6]. Die Spur ist hier über ein vollständiges System von Einelektron-Funktionen zu bilden. Die Spektralfunktion $A(E)$ läßt sich durch die Sprungwerte der kausalen Einteilchen-Green-Funktionen an der reellen Achse ausdrücken:

$$A(E)=\lim_{\eta\to0}\frac{1}{i}[G(E-i\eta)-G(E+i\eta)]$$

$$=\frac{1}{i}[G^-(E)-G^+(E)], \tag{4}$$

$$G^\pm(E)=\lim_{\eta\to0}\frac{1}{E-H\mp i\eta}. \tag{5}$$

Entsprechend gilt:

$$A_0(E)=\frac{1}{i}[G_0^-(E)-G_0^+(E)]=2\pi\,\delta(E-H_0) \tag{6}$$

mit

$$G_0^\pm(E)=\lim_{\eta\to0}\frac{1}{E-H_0\mp i\eta}. \tag{7}$$

3. Transversale Leitfähigkeit

Für die statische transversale Leitfähigkeit σ_{xx} läßt sich die Formel (3) mit Hilfe der Streuoperatoren $T^\mp(E)$ weiter vereinfachen. Diese genügen den Integralgleichungen

$$T^\mp(E)=U+UG_0^\mp(E)\,T^\mp(E) \tag{8}$$

und hängen wegen (1), (5), (7) und (8) mit den Green-Funktionen gemäß

$$G^{\mp}(E)=G_0^{\mp}(E)+G_0^{\mp}(E)\,T^{\mp}(E)\,G_0^{\mp}(E) \tag{9}$$

zusammen. Wir können σ_{xx} direkt durch die Streuoperatoren $T^{\mp}(E)$ ausdrücken, wenn wir (9) in die rechte Seite von (3) einsetzen und die Beziehung (6) beachten:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}=&\frac{e^2\hbar}{4\pi V}\int_{-\infty}^{+\infty}dE\left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right)\Big[\mathrm{Sp}\{A_0(E)\,v_x\,A_0(E)\,v_x\}\\&-\frac{2}{i}\,\mathrm{Sp}\{A_0(E)\,v_x(G_0^{+}(E)\,T^{+}(E)\,G_0^{+}(E)-G_0^{-}(E)\,T^{-}(E)\,G_0^{-}(E))\,v_x\}\\&+\frac{1}{i}\,\mathrm{Sp}\{(G_0^{+}(E)\,T^{+}(E)\,G_0^{+}(E)-G_0^{-}(E)\,T^{-}(E)\,G_0^{-}(E))\\&\cdot v_x(G_0^{+}(E)\,T^{+}(E)\,G_0^{+}(E)-G_0^{-}(E)\,T^{-}(E)\,G_0^{-}(E))\,v_x\}\Big].\end{aligned} \tag{10}$$

Wir nutzen nun eine spezielle Eigenschaft der Bewegung transversal zum Magnetfeld aus, indem wir in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld Zentrums- und Relativkoordinaten einführen

$$x=X+x_{\mathrm{rel}},\qquad y=Y+y_{\mathrm{rel}}. \tag{11}$$

Die ersteren sind durch die Gleichungen

$$\frac{i}{\hbar}[H_0,X]=\frac{i}{\hbar}[H_0,Y]=0 \tag{12}$$

definiert; sie sind also Integrale der freien Bewegung. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}v_x=\dot{x}=\frac{i}{\hbar}[H,x]=\frac{i}{\hbar}[H_0,x]=\frac{i}{\hbar}[H_0,x_{\mathrm{rel}}]\\ v_y=\frac{i}{\hbar}[H_0,y_{\mathrm{rel}}].\end{aligned} \tag{13}$$

Mit Einelektron-Funktionen $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$, die H_0 und X diagonalisieren, erhalten wir aus (13) eine für das Folgende wichtige Beziehung:

$$\frac{1}{\omega_{\alpha\beta}}(v_x)_{\alpha\beta}=\frac{i}{\hbar}(x_{\mathrm{rel}})_{\alpha\beta},\qquad \omega_{\alpha\beta}\equiv\varepsilon_\alpha-\varepsilon_\beta=\pm\hbar\Omega \tag{14}$$

$\left(\Omega=\dfrac{eB}{mc}\right)$. Bei $B=0$ ist $(v_x)_{\alpha\beta}=(v_x)_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta}$, und (14) wird sinnlos. Deshalb wollen wir im folgenden ausdrücklich $B\neq 0$ voraussetzen.

Wir führen nun einige Umformungen auf der rechten Seite von (10) aus. Der erste Summand

$$F_0(E)=\mathrm{Sp}\{A_0(E)\,v_x\,A_0(E)\,v_x\} \tag{15}$$

liefert für $B \neq 0$ keinen Beitrag zur Leitfähigkeit, denn er entspricht dem störstellenfreien Fall (für $B=0$ wird $F_0(E)$ singulär). Die Umformung des zweiten Summanden mit Hilfe von (14)

$$F_1(E) = -\frac{2}{i} \mathrm{Sp}\{A_0(E)\, v_x [G_0^+(E)\, T^+(E)\, G_0^+(E) - G_0^-(E)\, T^-(E)\, G_0^-(E)]\, v_x\}$$

$$= -\frac{2}{i} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} A_{0\alpha}(E) \left[(v_x)_{\alpha\beta} \frac{1}{\omega_{\alpha\beta}} T^+_{\beta\gamma}(E) \frac{1}{\omega_{\alpha\gamma}} (v_x)_{\gamma\alpha} \right.$$

$$\left. - (v_x)_{\alpha\beta} \frac{1}{\omega_{\alpha\beta}} T^-_{\beta\gamma}(E) \frac{1}{\omega_{\alpha\gamma}} (v_x)_{\gamma\alpha} \right]$$

$$= \frac{2}{\hbar^2} \frac{1}{i} \mathrm{Sp}\{A_0(E)[x_{\mathrm{rel}}\, T^-(E)\, x_{\mathrm{rel}} - x_{\mathrm{rel}}\, T^+(E)\, x_{\mathrm{rel}}]\}$$

führt nach Anwendung des optischen Theorems

$$\frac{1}{i}(T^-(E) - T^+(E)) = T^\pm(E)\, A_0(E)\, T^\pm(E) \equiv W(E) \tag{16}$$

zu

$$F_1(E) = \frac{2}{\hbar^2} \mathrm{Sp}\{A_0(E)\, x_{\mathrm{rel}}\, T^\pm(E)\, A_0(E)\, T^\mp(E)\, x_{\mathrm{rel}}\}. \tag{17}$$

Die Größe

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{\hbar} T^\pm_{\alpha\beta}(E)\, A_{0\beta}(E)\, T^\mp_{\beta\alpha}(E) \Big|_{E=\varepsilon_\alpha} \tag{18}$$

ist die exakte, durch die Gesamtheit aller Störstellen vermittelte Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit vom Zustand α in den Zustand β.

Bei der Umformung des dritten Summanden verwenden wir die Identität

$$G_{0\alpha}(E)\, G_{0\beta}(E) = \frac{1}{\omega_{\alpha\beta}} (G_{0\alpha}(E) - G_{0\beta}(E)), \quad \omega_{\alpha\beta} \neq 0, \tag{19}$$

die für beliebige Paarung der oberen Indexvorzeichen gültig ist. Wir erhalten

$$\mathrm{Sp}\{G_0^+(E)\, T^+(E)\, G_0^+(E)\, v_x\, G_0^-(E)\, T^-(E)\, G_0^-(E)\, v_x\}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} T^+_{\alpha\beta}(E) \frac{1}{\omega_{\beta\gamma}} [G^+_{0\beta}(E) - G^-_{0\gamma}(E)]$$

$$\cdot (v_x)_{\beta\gamma}\, T^-_{\gamma\delta}(E) \frac{1}{\omega_{\delta\alpha}} [G^+_{0\delta}(E) - G^-_{0\alpha}(E)]\, (v_x)_{\delta\alpha} \tag{20}$$

$$= \mathrm{Sp}\left\{ T^+(E) \left[G_0^+(E) \frac{i}{\hbar} x_{\mathrm{rel}} - \frac{i}{\hbar} x_{\mathrm{rel}}\, G_0^-(E) \right] \right.$$

$$\left. \cdot\, T^-(E) \left[G_0^-(E) \frac{i}{\hbar} x_{\mathrm{rel}} - G_0^+(E) \frac{i}{\hbar} x_{\mathrm{rel}} \right] \right\}$$

usw. und nach geeigneter Zusammenstellung

$$
\begin{aligned}
F_2(E) = \mathrm{Sp}\,\{&(G_0^+(E)\,T^+(E)\,G_0^+(E) - G_0^-(E)\,T^-(E)\,G_0^-(E)) \\
&\cdot v_x(G_0^+(E)\,T^+(E)\,G_0^+(E) - G_0^-(E)\,T^-(E)\,G_0^-(E))\,v_x\} \\
= \frac{2}{\hbar^2}\,\mathrm{Sp}\,\{&x_{\mathrm{rel}}(\underline{T^+(E) - T^-(E)}) \\
&\cdot x_{\mathrm{rel}}(G_0^-(E)\,T^-(E)\,G_0^-(E) - G_0^+(E)\,T^+(E)\,G_0^+(E))\} \\
+ \frac{1}{\hbar^2}\,\mathrm{Sp}\,\{&x_{\mathrm{rel}}(\underline{T^+(E)}\,G_0^+(E) - T^-(E)\,G_0^-(E)) \\
&\cdot x_{\mathrm{rel}}(T^+(E)\,G_0^+(E) - \underline{T^-(E)}\,G_0^-(E))\} \\
+ \frac{1}{\hbar^2}\,\mathrm{Sp}\,\{&x_{\mathrm{rel}}(G_0^+(E)\,\underline{T^+(E)} - G_0^-(E)\,T^-(E)) \\
&\cdot x_{\mathrm{rel}}(G_0^+(E)\,T^+(E) - G_0^-(E)\,\underline{T^-(E)})\}\,.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Wenden wir in den unterstrichenen Faktoren das optische Theorem wieder an, so erhalten wir Beiträge der Ordnung T^2 und Beiträge höherer Ordnung. Die ersteren fassen wir zusammen mit $F_1(E)$, Gl. (17), und führen in ihnen vermöge (11) die Zentrumskoordinate ein:

$$
F_1(E) + F_2(E) = \frac{1}{\hbar^2}\,\mathrm{Sp}\,\{A_0(E)[T^-(E), X]\,A_0(E)[X, T^+(E)]\} + R(E)\,, \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
R(E) = \mathrm{Sp}\,\{&A_0(E)[T^-(E), x]\,A_0(E)[x, T(E)] \\
&- 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\,\{A_0(E)[T^-(E), X]\,A_0(E)[x, T^+(E)]\} \\
&+ 4\,\mathrm{Re}\,i\,\mathrm{Sp}\,\{x_{\mathrm{rel}}\,W(E)\,x_{\mathrm{rel}}\,G_0^+(E)\,T^+(E)\,G_0^+(E)\} \\
&- 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\,\{x_{\mathrm{rel}}\,W(E)\,G_0^+(E)\,x_{\mathrm{rel}}\,T^+(E)\,A_0(E)\} \\
&- 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\,\{W(E)\,x_{\mathrm{rel}}\,A_0(E)\,T^+(E)\,x_{\mathrm{rel}}\,G_0^+(E)\} \\
&- 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\,\{x_{\mathrm{rel}}\,W(E)\,G_0^+(E)\,x_{\mathrm{rel}}\,W(E)\,G_0^-(E)\}\,.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Aus der Beziehung*

$$
[T^{\pm}(E), x] = T^{\pm}(E)[G_0^{\mp}(E), x]\,T^{\mp}(E) \tag{24}
$$

geht hervor, daß $R(E)$ keine Anteile der Ordnung T^2 mehr enthält. Mit Hilfe von (7), (11), (16) und (24) läßt sich das Restglied $R(E)$ nach einigen geeigneten Umformungen auf die Gestalt

$$
\begin{aligned}
R(E) = \mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\,\{&W(E)[G_0^+(E), x_{\mathrm{rel}}]\,W(E)[x_{\mathrm{rel}}, G_0^-(E)]\} \\
&- 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\,\{A_0(E)\,T^-(E)\,x\,A_0(E)[x, T^+(E)]\}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

* Zur Begründung von (24) setze man in die linke Seite (8) ein und beachte $[U, x] = 0$. Man erhält dann eine Integralgleichung für $[T^+(E), x]$. Ein Vergleich mit (8) ergibt als Lösung die rechte Seite von (24).

bringen. Nun gilt aber

$$
\begin{aligned}
&-2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\{A_0(E)\,T^-(E)\,x\,A_0(E)[x,T^+(E)]\}\\
&=\mathrm{Sp}\{W x A_0\,T^+[G_0^+,x]-[G_0^-,x]\,T^-A_0\,x\,W\}\\
&=\mathrm{Sp}\{x\,W x(A_0\,T^+\,G_0^+ + G_0^-\,T^-A_0 - G_0^+\,T^+A_0 - A_0\,T^-\,G_0^-\}\\
&\quad-\mathrm{Sp}\{T^+A_0[T^-,x]\,A_0\,T^+\,x\,G_0^+ + G_0^-\,x\,T^-A_0[x,T^+]\,A_0\,T^-\}\\
&=\mathrm{Sp}\{x\,W(E)\,x\,(G_0^+(E)\,W(E)\,G_0^-(E) - G_0^-(E)\,W(E)\,G_0^+(E))\}\\
&\quad-\mathrm{Sp}\{W(E)[G_0^-(E),x]\,W(E)\,x\,G_0^+(E) + G_0^-(E)\,x\,W(E)[x,G_0^+(E)]\,W(E)\}\\
&=-\mathrm{Sp}\{W(E)[G_0^+(E),x]\,W(E)[x,G_0^-(E)]\\
&=-\mathrm{Sp}\{W(E)[G_0^+(E),x_{\mathrm{rel}}]\,W(E)[x_{\mathrm{rel}},G_0^-(E)]\,,
\end{aligned}
$$

und daher verschwindet das Restglied identisch

$$R(E)\equiv 0\,. \tag{26}$$

Für die transversale Leitfähigkeit erhalten wir daher unter Berücksichtigung von (18)

$$\sigma_{xx}=\frac{e^2}{V}\sum_{\alpha,\alpha'}\left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_\alpha}\right)(X_\alpha - X_{\alpha'})^2\,w_{\alpha\alpha'}\,. \tag{27}$$

Diese Formel ist bereits von KUBO u. Mitarb.[5] (durch Ausnutzung der Ergodizitätsannahme) abgeleitet worden. Die Ergebnisse von KAHN, BYCHKOV und SKOBOV ergeben sich aus ihr als Spezialfälle. Die Formel (27) besitzt die gleiche Gestalt wie die Titeica-Formel. Insbesondere tritt in ihr nur die Mittelpunktskoordinate X auf; sie zeigt, daß die transversale Elektrizitätsleitung ein Diffusionsvorgang ist. Doch ist die Formel (27) – im Gegensatz zur eigentlichen Titeica-Formel – völlig allgemein: sie gilt für beliebig starke Magnetfelder $B\neq 0$ und für beliebige Störstellenpotentiale. Aus der hier gegebenen Ableitung geht hervor, daß sie (für $B\neq 0$) eine identische Umformung der allgemeinen Kubo-Formel (3) ist.

Da dieses Ergebnis auf den ersten Anblick vielleicht überraschen mag, wollen wir einige ergänzende Bemerkungen anfügen.

Formel (27) ist für beliebige Magnetfelder gültig. Doch läßt sich in ihr der Grenzübergang $B\to 0$ nicht ausführen, da wir spezielle Eigenschaften der Bewegung im Magnetfeld (Gln. (11)–(14)) ausgenutzt haben. In der Tat läßt sich zeigen, daß das Ergebnis davon abhängt, in welcher Weise man folgenden doppelten Grenzübergang ausführt:

$$\lim_{V\to\infty}\lim_{B\to 0} \quad \text{oder} \quad \lim_{B\to 0}\lim_{V\to\infty}\,. \tag{28}$$

Der Operator X ist nämlich mit x und daher mit einem ortsabhängigen Potential nicht vertauschbar. Folglich ist x für ein endliches System zwischen unendlichen Potentialwänden keine Erhaltungsgröße des ungestörten Problems, und die Aufspaltung (11) wird sinnlos. Dies bedeutet, daß die Grenzübergänge $V\to\infty$ und $B\to 0$ nicht vertauschbar sind. Physikalisch sinnvoll ist die Reihenfolge $\lim\limits_{V\to\infty}\lim\limits_{B\to 0}$. Wenn wir in (27) den Grenzübergang $B\to 0$ ausführen, benutzen wir die umgekehrte Reihenfolge und erhalten daher ein unphysikalisches Ergebnis:

$$\lim_{B\to 0}\frac{e^2}{V\Omega^2}\sum_{\alpha,\alpha'}\left(-\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_\alpha}\right)(\Omega X_\alpha-\Omega X_{\alpha'})^2 w_{\alpha\alpha'}$$
$$=\left(\lim_{B\to 0}\frac{1}{\Omega^2}\right)\frac{\hbar^2 e^2}{m^2 V}\sum_{k,k'}\left(-\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_k}\right)(k_x-k_x')^2 w_{kk'}=\lim_{B\to 0}\frac{c}{B^2}\to\infty\,. \tag{29}$$

Hinsichtlich der weiteren Untersuchung der Formel (27) verweisen wir auf KUBO u. Mitarb.[5].

4. Longitudinale Leitfähigkeit

Die vorangehenden Überlegungen zeigen, daß unsere Methode zur Berechnung der transversalen Leitfähigkeit σ_{xx} zur Berechnung der longitudinalen Leitfähigkeit σ_{zz} und der Leitfähigkeit für verschwindendes Magnetfeld σ_0 völlig ungeeignet ist. In der Tat ist es sehr viel schwieriger, σ_{zz} und σ_0 für eine *bestimmte* Störstellenverteilung zu berechnen als σ_{xx}. Das Problem vereinfacht sich erst, wenn wir über alle möglichen Störstellenverteilungen mitteln.

Für die longitudinale Leitfähigkeit σ_{zz} läßt sich die Kubo-Formel (3) mit Hilfe von (4) und (5) auf die Gestalt

$$\sigma_{zz}=\frac{e^2\hbar}{2\pi V}\int_{-\infty}^{+\infty}dE\left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right)\sum_\alpha(v_z)_\alpha[F^{+-}_{\alpha\alpha}(E)-\mathrm{Re}\,F^{--}_{\alpha\alpha}(E)] \tag{30}$$

bringen. Dabei ist

$$F^{+-}_{\alpha\alpha'}(E)=\langle\langle\alpha|\,G^+(E)\,v_z\,G^-(E)\,|\alpha'\rangle\rangle_{\mathrm{St}},$$
$$F^{--}_{\alpha\alpha'}(E)=\langle\langle\alpha|\,G^-(E)\,v_z\,G^-(E)\,|\alpha'\rangle\rangle_{\mathrm{St}} \tag{31}$$

($\langle\langle\ \rangle\rangle_{\mathrm{St}}$ bedeutet Mittelung über alle Störstellenverteilungen). Für das Folgende legen wir die Eichung

$$A(r)=(0,Bx,0) \tag{32}$$

fest. Dann sind die Eigenfunktionen von H_0 die Landau-Funktionen

$$\langle r|\alpha\rangle=\psi_\alpha(r)=\frac{1}{\sqrt{L_x L_y}}e^{ik_z z}e^{ik_y y}\varphi_N(x-X),\qquad \alpha\equiv(N,k_y,k_z), \tag{33}$$

wobei $\varphi_N(x)$ normierte Oszillator-Eigenfunktion und $X = -\frac{\hbar}{m\Omega} k y$ die Mittelpunktskoordinate bezeichnet. Die Eigenwerte von H_0 sind

$$\varepsilon_\alpha = \hbar\Omega(N+\tfrac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}, \qquad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{34}$$

In den Ausdrücken für F^{+-} und F^{--} treten Produkte von Green-Funktionen auf. Die Mittelung dieser Produkte führen wir nach der graphischen Methode von EDWARDS[7] durch. Die einfache Übersetzung dieser Methode vom Fall $B=0$ auf den Fall $B \neq 0$ ist möglich, weil für kugelsymmetrische Störstellen — auf die wir uns hier beschränken wollen — die gemittelten Green-Funktionen $\langle G^{\mp}_{\alpha\alpha'}, (E)\rangle_{\mathrm{St}}$ und die Funktionen $F^{+-}_{\alpha\alpha'}(E)$ und $F^{--}_{\alpha\alpha'}(E)$ in der Landau-Darstellung diagonal sind. Der Beweis der ersten Behauptung kann ähnlich geführt werden wie der Beweis analoger Sätze bei HOLSTEIN[8] und KEITER[9], und wie der Beweis der zweiten Behauptung, der im Anhang ausgeführt wird. Es gilt also:

$$\langle G^{\mp}_{\alpha\alpha'}(E)\rangle_{\mathrm{St}} = \delta_{\alpha\alpha'} G^{\mp}_{\alpha}(E) = \delta_{\alpha\alpha'} \frac{1}{E - \varepsilon_\alpha - \Sigma^{\mp}_{\alpha}(E)} \tag{35}$$

mit

$$\Sigma^{\mp}_{\alpha}(E) = \Delta_\alpha(E) \pm \frac{i}{2} \Gamma_\alpha(E) \tag{36}$$

und

$$F^{+-}_{\alpha\alpha'}(E) = F^{+-}_{\alpha}(E)\,\delta_{\alpha\alpha'}, \qquad F^{--}_{\alpha\alpha'}(E) = F^{--}_{\alpha}(E)\,\delta_{\alpha\alpha'}. \tag{37}$$

Wir benutzen die gleiche Graphensymbolik wie EDWARDS: Ein Störstellenpotential stellen wir durch eine gestrichelte Linie dar. Durch die Mittlung werden zwei, drei usw. Störstellenpotentiale verknüpft. Entsprechend laufen ihre Linien in einem Punkt zusammen. Gemittelte Green-Funktionen werden durch eine dicke, „ungestörte" Green-Funktionen durch eine dünne, durchgezogene Linie dargestellt. Die Funktionen $F_\alpha(E)$ werden ähnlich gezeichnet wie Zweiteilchen-Green-Funktionen, Fig. 1.

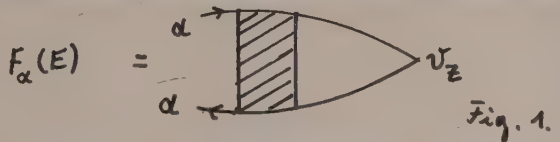

Fig. 1.

Die durch den schraffierten Wechselwirkungsblock symbolisierten Verknüpfungen zwischen den beiden Green-Funktionen können wir in zwei Klassen zerlegen. Die eine Klasse enthält alle Graphen, die durch Zerschneiden der oberen und unteren Elektronenlinien nicht zerfallen, sie wird mit I bezeichnet und durch Fig. 2

---

[7] EDWARDS, S.F.: Phil. Mag. **3**, 1020 (1958).
[8] SHER, H., and T. HOLSTEIN: Phys. Rev. **148**, 598 (1966).
[9] KEITER, H.: Z. Physik **198**, 215 (1967).

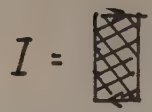

Fig. 2.

dargestellt, die zweite Klasse enthält alle Graphen, die nicht zur ersten gehören. Damit gilt die graphische Gleichung Fig. 3

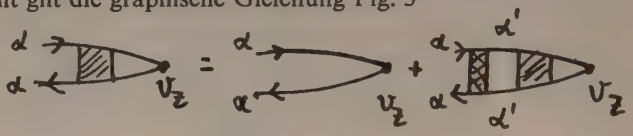

Fig. 3.

oder ausgeschrieben

$$F_\alpha^{+-}(E)=G_\alpha^{+}(E)(v_z)_\alpha G_\alpha^{-}(E)+\sum_{\alpha'} G_\alpha^{+}(E)\,G_{\alpha'}^{-}(E)\,I_{\alpha\alpha'}^{+-}(E)\,F_{\alpha'}^{+-}(E) \qquad (38)$$

und

$$F_\alpha^{--}(E)=G_\alpha^{-}(E)(v_z)_\alpha G_\alpha^{-}(E)+\sum_{\alpha'} G_\alpha^{-}(E)\,G_{\alpha'}^{-}(E)\,I_{\alpha\alpha'}^{--}(E)\,F_{\alpha'}^{--}(E). \qquad (39$$

Da wir uns mit der niedrigsten Ordnung in der Störstellendichte n_i begnügen wollen, reicht es aus, in der Berechnung von $I^{+-}(E)$ nur die Graphen der Fig. 4

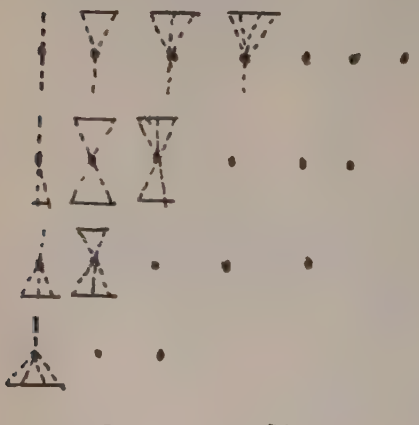

Fig. 4.

zu berücksichtigen. Sie ergeben

$$I^{+-}_{\alpha\alpha'}(E)=n_i\int_V d^3R\, t^{+}_{\alpha\alpha'}(E,R)\, t^{-}_{\alpha'\alpha}(E,R), \tag{40}$$

wobei die t-Matrix der Gleichung

$$t^{\mp}_{\alpha\alpha'}(E,R)=\langle\alpha|\,u(r-R)\,|\alpha'\rangle+\sum_{\alpha''}\langle\alpha|\,u(r-R)\,|\alpha''\rangle\, G^{\mp}_{0\alpha''}(E)\, t^{\mp}_{\alpha''\alpha'}(E,R) \tag{41}$$

genügt. Wir brauchen noch $G^{+}_{\alpha}(E)\,G^{-}_{\alpha}(E)$. Nach einigen einfachen Umformungen erhalten wir

$$G^{+}_{\alpha}(E)\,G^{-}_{\alpha}(E)=\frac{A_\alpha(E)}{\Gamma_\alpha(E)} \tag{42}$$

und

$$\Gamma_\alpha(E)=\frac{1}{i}\left[\Sigma^{-}_{\alpha}(E)-\Sigma^{+}_{\alpha}(E)\right]. \tag{43}$$

Zu $\Sigma^{\mp}_{\alpha}(E)$ tragen in niedrigster Ordnung in der Störstellendichte nur die Graphen der Fig. 5

Fig. 5.

bei.

Daher gilt

$$\Sigma_\alpha^{\mp}(E)=n_i\int_V d^3R\, t_{\alpha\alpha}^{\mp}(E,R). \tag{44}$$

Mit (43) und dem optischen Theorem folgt in dieser Näherung aus (42)

$$G_\alpha^+(E)\,G_\alpha^-(E)=\frac{A_{0\alpha}(E)}{n_i\sum_{\alpha'}\int_V d^3R\, t_{\alpha\alpha'}^+(E,R)\,A_{0\alpha'}(E)\,t_{\alpha'\alpha}^-(E,R)}. \tag{45}$$

Der Ansatz

$$F_\alpha^{+-}(E)=\frac{1}{\hbar}A_{0\alpha}(E)\,\Phi_\alpha(\varepsilon_\alpha) \tag{46}$$

überführt (38) wegen (40) und (45) in die bekannte Boltzmann-Bloch-Gleichung

$$-(v_z)_\alpha=\sum_{\alpha'}\tilde{w}_{\alpha\alpha'}[\Phi_{\alpha'}(\varepsilon_{\alpha'})-\Phi_\alpha(\varepsilon_\alpha)], \tag{47}$$

wobei in den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\tilde{w}_{\alpha\alpha'}=n_i\frac{1}{\hbar}\int_V d^3R\, t_{\alpha\alpha'}^+(\varepsilon_\alpha,R)\,A_{0\alpha'}(\varepsilon_\alpha)\,t_{\alpha'\alpha}^-(\varepsilon_\alpha,R) \tag{48}$$

nur der Beitrag der unabhängigen Streuprozesse an den verschiedenen Störstellen berücksichtigt wird.

In der Bornschen Näherung sind die allgemeinen Matrixelemente von I

$$I_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha''}(E)=n_i\int_V t_{\alpha\alpha'}(E,R)\,t_{\alpha''\alpha}(E,R)\,d^3R \tag{49}$$

diagonal

$$\begin{aligned}I_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha''}(E)\Big|_{\text{Born}}&=n_i\int_V\langle\alpha|\,u(r-R)\,|\alpha'\rangle\langle\alpha''|\,u(r-R)\,|\alpha\rangle\,d^3R\\&=n_i\int_V\left|\langle\alpha|\,u(r-R)\,|\alpha'\rangle\right|^2 d^3R\,\delta_{\alpha'\alpha''}.\end{aligned} \tag{50}$$

In dieser Näherung benötigt man daher die Diagonalität von F nicht. In unserer Näherung ist $\Phi_\alpha(\varepsilon_\alpha)$ und daher $F^{+-}(E)$ proportional $1/n_i$. Wir wollen nun zeigen, daß $F^{--}(E)$ von höherer Ordnung in der Störstellendichte ist. Zu diesem Zweck multiplizieren wir (39) mit einer beliebigen Testfunktion $g(E)$ und integrieren über E. Zunächst entwickeln wir das inhomogene Glied in (39) nach der Selbstenergie $\Sigma_\alpha^-(E)$, da diese Entwicklung wegen (44) einer Entwicklung nach der Störstellendichte entspricht.

$$\begin{aligned}&(v_z)_\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}dE\,g(E)[G_\alpha^-(E)]^2\\&=(v_z)_\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}dE\,g(E)[G_{0\alpha}^-(E)+G_{0\alpha}^-(E)\,\Sigma_\alpha^-(E)\,G_{0\alpha}^-(E)+\cdots]^2\\&=(v_z)_\alpha\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}dE\,g(E)[G_{0\alpha}^-(E)]^2+2\int_{-\infty}^{+\infty}dE\,g(E)\,\Sigma_\alpha^-(E)[G_{0\alpha}^-(E)]^3+\cdots\right\}.\end{aligned} \tag{51}$$

Da $G_{0\alpha}^{-}(E)$ und $\Sigma_{\alpha}^{-}(E)$ in der unteren komplexen E-Halbebene analytische Funktionen sind, folgt mit (7)

$$(v_z)_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dE\,[G_\alpha^-(E)]^2 = (v_z)_\alpha \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dE\, \frac{g(E)-g(\varepsilon_\alpha)}{(E-\varepsilon_\alpha - i0)^2} + \cdots \right\}$$
$$= (v_z)_\alpha \left\{ \mathrm{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dE\, \frac{g(E)-g(\varepsilon_\alpha)}{(E-\varepsilon_\alpha)^2} \right. \tag{52}$$
$$\left. + i\pi \frac{d}{d\varepsilon_\alpha} g(\varepsilon_\alpha) + \cdots \right\}.$$

Es gilt also die Entwicklung

$$(v_z)_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dE\, g(E)[G_\alpha^-(E)]^2 = f_0 + f_1 n_i + f_2 n_i^2 + \cdots . \tag{53}$$

Beachten wir noch, daß in unserer Näherung

$$I_{\alpha\alpha'}^{--}(E) = n_i \int_V d^3\boldsymbol{R}\, t_{\alpha\alpha'}^{-}(E,\boldsymbol{R})\, t_{\alpha'\alpha}^{-}(E,\boldsymbol{R}) \tag{54}$$

ist, so folgt aus (39) mit (53) und (54) die Entwicklung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE\, g(E) F_\alpha^{--}(E) = f_0 + \tilde{f}_1 n_i + \tilde{f}_2 (n_i)^2 + \cdots . \tag{55}$$

Damit haben wir gezeigt, daß in (30) $\mathrm{Re}\, F^{--}(E)$ keinen Beitrag proportional $1/n_i$; zur Leitfähigkeit liefert, sondern erst bei höheren Störstellendichten beachtet werden muß. Daher ist die Boltzmann-Bloch-Gleichung (47) zur Berechnung der Leitfähigkeit nur dann ausreichend, wenn man sich auf die niedrigste Ordnung in der Störstellendichte beschränken kann.

Der Unterschied zwischen der Bornschen- und der t-Matrix-Näherung läßt sich leicht für Störstellen sehr kurzer Reichweite demonstrieren. Für Störstellen der Reichweite

$$a \ll l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\,\Omega}} \tag{56}$$

erhielt Skobov[4] die t-Matrix

$$t_{\alpha\alpha'}^{\pm}(E,\boldsymbol{R}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} f \psi_\alpha(\boldsymbol{R})\, \psi_{\alpha'}^{*}(\boldsymbol{R})\, S^{\pm}(E) \tag{57}$$

mit

$$S^{\pm}(E) = \left[1 + \frac{\sqrt{\frac{m}{2}} f\Omega}{\sqrt{(N_E+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega - E}} \pm i \sum_{N=0}^{N_E-1} \frac{\sqrt{\frac{m}{2}} f\Omega}{\sqrt{E-(N+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega}} \right]^{-1}, \tag{58}$$

wobei N_E die größte ganze Zahl, die $\frac{E}{\hbar\Omega}-\frac{1}{2}$ übersteigt und f eine Streulänge ist. Setzen wir (57) in (48) und dieses in die Transportgleichung (47) ein, so können wir sie sofort lösen:

$$\Phi_\alpha(\varepsilon_\alpha)=\frac{(v_z)_\alpha}{\sum\limits_{\alpha'}\tilde{w}_{\alpha\alpha'}}=\frac{\hbar}{m}\frac{k_z}{\sum\limits_{\alpha'}\tilde{w}_{\alpha\alpha'}}. \tag{59}$$

Hieraus ergibt sich im Grenzfall verschwindender Temperaturen über (46) und (30) nach kurzer Rechnung

$$\sigma_{zz}=\frac{2me^2}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{n_i f^2}|S^+(\zeta)|^2\frac{\sum\limits_{N=0}^{N_\zeta-1}\sqrt{\zeta-(N+\frac{1}{2})\hbar\Omega}}{\sum\limits_{N'=0}^{N_\zeta-1}\frac{1}{\sqrt{\zeta-(N'+\frac{1}{2})\hbar\Omega}}}, \tag{60}$$

wobei ζ die Fermienergie ist. Wählt man das Magnetfeld so, daß

$$(N'+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega=\zeta \tag{61}$$

gilt, dann wird in der Bornschen Näherung – sie entspricht $S^\pm(\zeta)=1$ –

$$\sigma_{zz}=0. \tag{62}$$

Völlig anders verhält sich die Leitfähigkeit, wenn wir die Funktion S, Gl. (58), in (60) einsetzen. Es gilt dann im Grenzfall

$$(N'+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega\to\zeta, \tag{63}$$

$$\sigma_{zz}=\frac{e^2}{(2\pi)^3\hbar}\frac{1}{n_i l^4}\frac{\sum\limits_{N=0}^{N_E-1}\sqrt{\zeta-(N+\frac{1}{2})\hbar\Omega}}{\sqrt{\zeta-(N'+\frac{1}{2})\hbar\Omega}}, \tag{64}$$

d.h. σ_{zz} wird unendlich bei $(N'+\frac{1}{2})\hbar\Omega=\zeta$. Für endliche Temperaturen bleibt σ_{zz} stets endlich.

Anhang

Wir beweisen nun, daß die Knotenfunktionen $F^{+-}(E)$ und $F^{--}(E)$ für kugelsymmetrische Störstellen in der Landau-Darstellung diagonal sind. In Orts- und Zeitdarstellungen gilt für sie

$$F(r,r',t,t_1)=(-i)^2\langle\langle\mathcal{T}\,\psi(r,t)\,v_z(t_1)\,\psi^+(r',0)\rangle\rangle_{\mathrm{St}}$$

mit

$$v_z(t_1)=\frac{\hbar}{i\,m}\int d^3r\,\psi^+(r,t_1)\frac{\partial}{\partial z}\psi(r,t_1).$$

Wir beginnen in der rotationssymmetrischen Eichung

$$A(r)=\tfrac{1}{2}B\times r$$

und führen eine Translation aus:

$$r \to r + a$$

$$\psi(r) \to \psi'(r) \equiv \psi(r+a) = \mathrm{T}^{-1}\,\psi(r)\,\mathrm{T}$$

$$H \to H' = \mathrm{T}^{-1} H\,\mathrm{T}.$$

Durch eine anschließende Eichtransformation

$$A \to A'' = \tfrac{1}{2} B \times (r-a)$$

$$\psi' \to \psi'' = e^{-i\frac{e\,B}{2\hbar c}(a_y x - a_x y)}\,\psi'$$

$$H' \to H'' = H^0 + U(r+a)$$

erhalten wir

$$F(r, r', t, t_1) = e^{i\frac{e\,B}{2\hbar c}[a_y(x-x') - a_x(y-y')]}$$
$$\cdot (-i)^2 \left\langle\left\langle \mathrm{T}\, e^{i H'' t}\psi(r+a)\, e^{-i H''(t-t_1)} v_z\, e^{-i H'' t_1}\psi^+(r'+a)\right\rangle\right\rangle_{\mathrm{St}}$$
$$= e^{i\frac{e\,B}{2\hbar c}[a_y(x-x') - a_x(y-y')]}\, F(r+a, r'+a, t, t_1).$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, daß bei der Mittelung über alle Störstellenkoordinaten integriert wird. Mit der Wahl

$$a = -\tfrac{1}{2}(r+r')$$

folgt

$$F(r, r', t, t_1) = e^{i\frac{e\,B}{2\hbar c}(x' y - x y')}\, F_1(r-r', t, t_1).$$

F ist also — bis auf einen Eichfaktor — translationsinvariant. Durch ähnliche Überlegungen kann man zeigen, daß F für kugelsymmetrische Störstellen invariant gegen Drehungen um die Magnetfeldrichtung ist

$$F(r, r', t, t_1) = e^{i\frac{e\,B}{2\hbar c}\cdot\rho\,\rho'\sin(\varphi-\varphi')}\, F_2\left([x+x']^2 + [y-y']^2,\ z-z',\ t,\ t_1\right)$$

mit

$$x = \rho\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Aus den Invarianzeigenschaften von F folgt (vgl. Hostein[8] und Keiter[9]), daß F bei der Eichung

$$A(r) = (0, Bx, 0)$$

in Landau-Darstellung diagonal ist:

$$F_{\alpha\alpha'}(t, t_1) = \delta_{\alpha\alpha'}\, F_\alpha(t, t_1).$$

Zur Quantentheorie der mgenetischen Widerstandstheorie

II Elektron-Phonon-System

EIKE BANGERT
Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

Eingegangen am 8. April 1968

On Quantum Theory of Galvanomagnetic Effects

II. Electron-Phonon-System

Calculating the oscillations of the electric conductivity of an electron-phonon-system (Froehlich model) in a homogenious magnetic field leads in Born approximation to unrealitic amplitudes. It is shown that important corrections to the amplitudes result from consideration of higher order transition rares. The conductivity formulas are obtained from quantum mechanical transport equations with corrections at the electron-phonon vertices, which give rise to the higher order transition rates.

1. Einleitung und Übersicht

Zwar ergeben sich im Falle eines Elektronen-Phononen-Systems schon in der Bornschen Näherung endliche Amplituden für die Oszillationen der transversalen Leitfähigkeit und keine Nullstellen für die longitudinale Leitfähigkeit. Doch haben die Amplituden in beiden Fällen unrealistische Werte. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß diese Amplituden in Wirklichkeit nicht durch den inelastischen Charakter der Wechselwirkung bestimmt sind, sondern — ähnlich wie beim Elektronen-Störstellen-System — durch Streuprozesse höherer Ordnung. Nach unserem Wissen liegen in der Literatur keine Untersuchungen vor über diese Abdämpfung der Oszillationen auf realistische Werte durch höhere Streuprozesse.

Wir gehen wieder von der allgemeinen Kubo-Formel für die elektrische Leitfähigkeit aus und wenden sie auf das Fröhlich-Modell mit dem bekannten, renormierten Hamiltonoperator an (2. Abschnitt). Nach Vernachlässigung der Phonon-drag-Effekte und Ausnutzung analytischer Eigenschaften läßt sich die Kubo-Formel auf geeignete Ein-Elektronen-Dichteoperatoren zurückführen (3. Abschnitt). Für diese Dichteoperatoren leiten wir ein gekoppeltes System von Transportgleichungen ab. Dabei beschränken wir uns auf jene irreduziblen Wechselwirkungsknoten, an die sich nur zwei Elektronenlinien und eine Phononlinie anschließen lassen (4. Abschnitt).

* D 7.

Bei der Lösung dieses Systems für den transversalen Fall beschränken wir uns auf starke Magnetfelder. Dabei machen wir von einer (in unserer Näherung bestehenden) nützlichen Beziehung zwischen dem Imaginärteil der Elektron-Selbstenergie und dem Wechselwirkungsknoten Gebrauch (Anhang A). Sie spielt hier eine ähnliche Rolle wie das optische Theorem im Teil I. Nach Ausnutzung einiger funktioneller Beziehungen (Anhang B) erhalten wir für die transversale Leitfähigkeit eine Formel vom Titeicaschen Typ, in der eine Übergangswahrscheinlichkeit höherer Ordnung – ausgedrückt durch die Wechselwirkungsknoten – auftritt. Mit Hilfe einiger Abschätzungen (Anhang B) läßt sich die abdämpfende Wirkung der Strahlungskorrekturen auf die Amplituden der Oszillationen einfach demonstrieren (5. Abschnitt). Im longitudinalen Fall lassen sich die Transportgleichungen auf eine Boltzmann-Bloch-Gleichung mit den gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten höherer Ordnung reduzieren (6. Abschnitt).

2. Ausgangspunkt

Wir betrachten das Fröhlichsche Modell: ein System von freien Elektronen und longitudinalen Phononen mit dem Hamiltonoperator

$$H=\sum_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\,a_{\alpha}^{+}\,a_{\alpha}+\sum_{q}\hbar\,\omega_{q}\,b_{q}^{+}\,b_{q}+\sum_{q,\,\alpha,\,\alpha'}\lambda_{\alpha\alpha'}^{q}\,a_{\alpha}^{+}\,a_{\alpha'}(b_{q}+b_{-q}^{+}). \qquad (1)$$

Hierbei ist α die Abkürzung für die Quantenzahlen N, X, k_z, $\omega_q=S|q|$ die renormierte Schallfrequenz, s die Schallgeschwindigkeit, ρ die Dichte und

$$\lambda_{\alpha\alpha'}^{q}=iC\sqrt{\frac{\hbar q^{2}}{2\rho\,\omega_{q}}}\,\frac{1}{\sqrt{V}}\langle\alpha|\,e^{iqr}\,|\alpha'\rangle=\frac{c(q)}{\sqrt{V}}\langle\alpha|\,e^{iqr}\,|\alpha'\rangle \qquad (2)$$

das renormierte Wechselwirkungs-Matrixelement.

Es ist für unseren Zweck vorteilhaft, von der folgenden Form der Kubo-Formel (I.2)* für die Diagonalelemente des statischen Leitfähigkeitstensors auszugehen:

$$\sigma_{kk}=\frac{\hbar\beta}{V}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Re}\,\frac{1}{\varepsilon}\,P(\varepsilon+i0). \qquad (3)$$

Dabei ist $P(\varepsilon+i0)$ die analytische Fortsetzung eines der Fourierkoeffizienten aus der Entwicklung

$$\langle\mathcal{T}j_k(t)\,j_k(0)\rangle=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}P(\mu_m)\,e^{i\mu_m t},\qquad \mathrm{Re}\,t=0,\qquad \mu_m=\frac{i\pi}{\beta}2m \qquad (4)$$

von der oberen Halbebene gegen die reelle Achse.

* Dieses bedeutet Gl. (2) aus Teil I.

3. Dichteoperatoren

Die Greenfunktion auf der linken Seite von (4) läßt sich ähnlich wie die übliche Zwei-Teilchen-Greenfunktion durch Graphen darstellen. Jedem Fourierkoeffizienten werden dann die zwei Graphenklassen a) und b), Fig. 1, zugeordnet.

Wie HOLSTEIN[1] gezeigt hat, entspricht der Beitrag des Graphen b) dem Phonon-drag. Diesen Effekt wollen wir nicht berücksichtigen und lassen die Graphen b) fort.

Die auf Fig. 2 dargestellte Knotenfunktion wird mit $F(\nu_n, \nu_n+\mu_m, \mu_m)$ bezeichnet.

Die Verwendung der üblichen Graphenregeln[1] ergibt

$$P(\mu_m)=\frac{1}{-i\beta^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sp}\{j_k F(\nu_n, \nu_n+\mu_m, \mu_m)\}, \quad \nu_n=\zeta-\frac{i\pi(2n+1)}{\beta}. \tag{5}$$

Diese Formel zeigt, daß die Knotenfunktion F die Bedeutung eines kausalen Ein-Elektronen-Dichteoperators besitzt.

Die Summation über n läßt sich in ein Konturintegral in der komplexen E-Ebene umwandeln. Wie ELISASHBERG[2] gezeigt hat, besitzt F folgende analytische Eigenschaften: Sieht man ν_n, $\nu_n+\mu_m$, μ_m als kontinuierliche Variablen an, so macht die Funktion F stets einen Sprung, wenn eine dieser Variablen die reelle Achse überschreitet, sonst ist sie analytisch (diese Eigenschaften folgen auch aus der Gl. (14)).

Da die Fermifunktion $f(E)$ an den Stellen $E=\nu_n$ Pole mit den Residuen $-1/\beta$ besitzt, folgt

$$P(\mu_m)=\frac{1}{-i\beta^2}\frac{-\beta}{2\pi i}\int_l dE\, f(E)\,\mathrm{Sp}\{j_k F(E, E+\mu_m, \mu_m)\}. \tag{6}$$

Die Kontur l, Fig. 3a, können wir zur Kontur l', Fig. 3b, verbiegen. Nach Verschiebung der Integrationsvariablen erhalten wir

$$\begin{aligned} P(\mu_m)=\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi} f(E)\,\mathrm{Sp}\{&j_k F(E-i0, E+\mu_m, \mu_m) \\ &-j_k F(E+i0, E+\mu_m, \mu_m)\} \\ +\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi} f(E-\mu_m)\,\mathrm{Sp}\{&j_k F(E-\mu_m, E-i0, \mu_m) \\ &-j_k F(E-\mu_m, E+i0, \mu_m)\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Die analytische Fortsetzung $\mu_m\to\varepsilon+i0$ führen wir aus, indem wir zunächst die Beziehung $f(E-\mu_m)=f(E)$ benutzen, und dann $\mu_m=\varepsilon+i0$

[1] HOLSTEIN, T.: Ann. Physik **29**, 410 (1964).
[2] ELIASHBERG, G.M.: Soviet Phys. JETP **14**, 886 (1962).

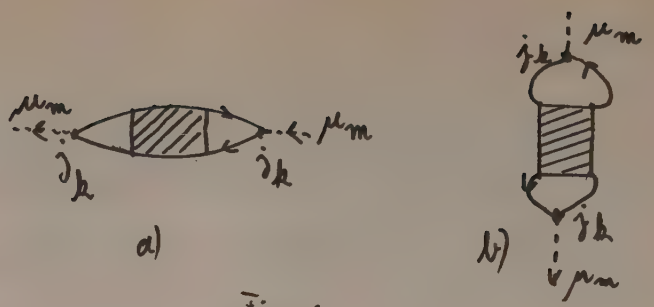

Fig. 1.

Fig. 2.

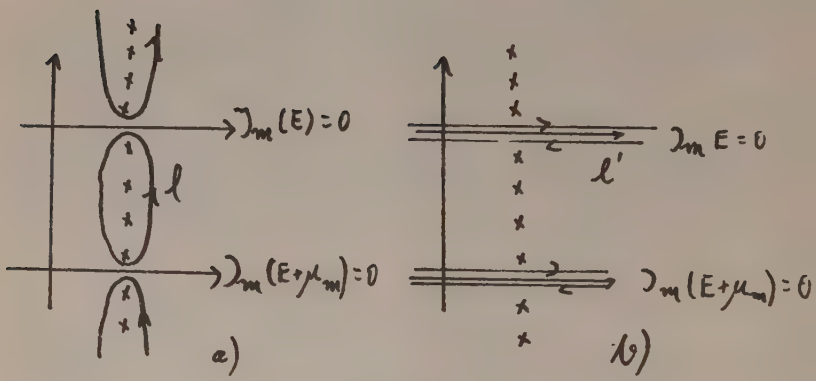

Fig. 3.

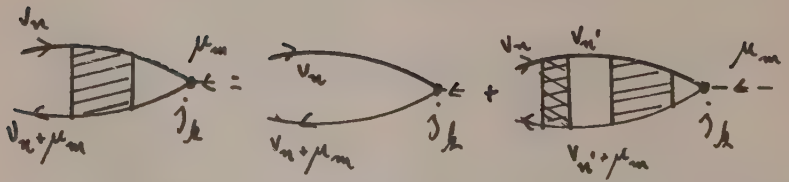

Fig. 4.

setzen

$$P(\varepsilon+i0)=\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}[f(E)-f(E+\varepsilon)]\,\mathrm{Sp}\{j_k F(E-i0, E+\varepsilon+i0, \varepsilon+i0)\}$$
$$-\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}[f(E)\,\mathrm{Sp}\{j_k F(E+i0, E+\varepsilon+i0, \varepsilon+i0)\} \qquad (8)$$
$$-f(E+\varepsilon)\,\mathrm{Sp}\{j_k F(E-i0, E+\varepsilon-i0, \varepsilon+i0\}].$$

Beachten wir, daß

$$F(E-i0, E+i0, +i0)\equiv F^{-+}(E) \qquad (9)$$

ein hermetischer Operator ist und

$$F(E+i0, E+i0, +i0)^{\dagger}\equiv F^{++}(E)^{\dagger}=F^{--}(E)\equiv F(E-i0, E-i0, +i0) \qquad (10)$$

gilt*, so können wir den Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ ausführen und erhalten

$$\sigma_{kk}=\frac{\hbar}{V}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right)[\mathrm{Sp}\{j_k F^{-+}(E)\}-\mathrm{Re}\,\mathrm{Sp}\{j_k F^{--}(E)\}]. \qquad (11)$$

Diese Formel gilt – bis auf den vernachlässigten Phonon-drag – für einen beliebigen Hamiltonoperator H. Sie läßt erkennen, daß F^{-+} und F^{--} die Rollen von Ein-Elektronen-Dichteoperatoren spielen.

4. Transportgleichungen

Die Elektron-Greenfunktion G und die Phonon-Greenfunktion D sind in der Landaudarstellung bzw. Impulsdarstellung diagonal[3]. Folglich können wir die üblichen Skelet-Graphen benutzen. Die Funktionen $G_\alpha(\nu_n)$ und $D_q(\mu_m)$ werden durch eine durchgezogene Linie bzw. eine Schlangenlinie dargestellt. Ähnlich wie in Teil I, 4. Abschnitt, gilt

wobei der doppelt schraffierte Bestandteil den irreduziblen Anteil des einfach schraffierten Wechselwirkungsblocks darstellt und im folgenden durch I bezeichnet wird.

* (9) und (10) sind Spezialfälle der allgemeinen Beziehung

$$[F_{\alpha\beta}(\nu_n, \nu_n+\mu_m, \mu_m)]^{*}=F_{\beta\alpha}(\nu_n^{*}+\mu_m^{*}, \nu_n^{*}, -\mu_m^{*}),$$

die direkt aus

$$F_{\alpha\beta}(\nu_n, \nu_n+\mu_m, \mu_m)$$
$$=\frac{1}{-i\beta}\int_0^{-i\beta}d\tau\int_0^{-i\beta}d\tau'\int_0^{-i\beta}d\tau''(-i)^2\langle\mathcal{T}a_\alpha(\tau)\,j_k(\tau')\,a_\beta^{+}(\tau'')\rangle$$
$$\cdot\, l^{i\nu_n\tau}\,l^{i\mu_m\tau'}\,l^{-i(\nu_n+\mu_m)\tau''}$$

folgt.

[3] Sher, H., and T. Holstein: Phys. Rev. **148**, 589 (1966).

Die niedrigste Näherung für I ist in Fig. 5 dargestellt. Dieser Ansatz entspricht der Bornschen Näherung und führt im transversalen Fall zur bekannten Titeica-Formel und im longitudinalen Fall zur üblichen Boltzmann-Bloch-Gleichung. Da wir das unphysikalische Verhalten der transversalen und der longitudinalen Leitfähigkeit nur dann beseitigen können, wenn wir über die Bornsche Näherung hinausgehen, müssen wir höhere Knotenkorrekturen berücksichtigen. Wie unsere Ergebnisse zeigen, genügt es, wenn wir uns auf den allgemeinsten Wechselwirkungsknoten beschränken, an den nur zwei Elektronenlinien und nur eine Phononlinie anschließen können. Ein Beispiel zeigt Fig. 6.

Der irreduzible Anteil I hat in dieser Näherung die in Fig. 7 dargestellte Form

Die üblichen Graphenregeln liefern

$$F(\nu_n, \nu_n+\mu_m, \mu_m) = G(\nu_n) j_k G(\nu_n+\mu_m) + G(\nu_n) \frac{1}{\beta} \sum_{n', q} \Lambda^q(\nu_n, \nu_{n'}, \nu_n-\nu_{n'}) \cdot F(\nu_{n'}, \nu_{n'}+\mu_m, \mu_m) \Lambda^{-q}(\nu_{n'}+\mu_m, \nu_n+\mu_m, \nu_n-\nu_{n'}) \quad (12) \cdot G(\nu_n+\mu_m) D_q(\nu_n-\nu_{n'}).$$

Die analytischen Eigenschaften der Wechselwirkungsknoten Λ^q und Λ^{-q} sind die gleichen wie die der Knotenfunktion F, so daß sich die Summation über n', ähnlich wie im Abschnitt 2, in ein Integral in der komplexen ω-Ebene entlang der Kontur L, Fig. 8, überführen läßt.
Die Kontur L läßt sich wieder verbiegen zu sechs dicht oberhalb bzw. dicht unterhalb der horizontalen Schnittlinie verlaufenden Geraden. Nach Verschiebung der Variablen können die Integrationen entlang der reellen Achse geführt werden.

Durch Verwendung der Beziehungen

$$f(\omega+\nu_n) = -n(\omega) = \frac{-1}{e^{\beta\omega}-1} \qquad f(\omega+\mu_m) = f(\omega), \qquad (13)$$

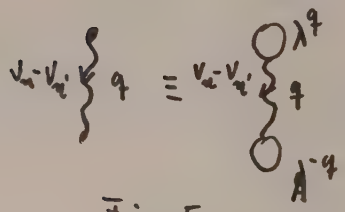

Fig. 5.

die die richtige analytische Fortsetzung ermöglichen, finden wir

$$
\begin{aligned}
&G^{-1}(\nu_n)\,F(\nu_n,\nu_n+\mu_m,\mu_m)\,G^{-1}(\nu_n+\mu_m)-j_k= \\
&+\sum_q \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\,n(\omega)\,\Lambda^q(\nu_n,\omega+\nu_n,-\omega-i0)\,F(\omega-\nu_n,\omega+\nu_n+\mu_m,\mu_m) \\
&\cdot\,\Lambda^{-q}(\omega+\nu_n+\mu_m,\nu_n+\mu_m,-\omega-i0)\,D_q(-\omega-i0) \\
&-\sum_q \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\,n(\omega)\,\Lambda^q(\nu_n,\omega+\nu_n,-\omega+i0)\,F(\omega+\nu_n,\omega+\nu_n+\mu_m,\mu_m) \\
&\cdot\,\Lambda^{-q}(\omega+\nu_n+\mu_m,\nu_n+\mu_m,-\omega+i0)\,D_q(-\omega+i0) \\
&-\sum_q \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\,f(\omega)\,\Lambda^q(\nu_n,\omega+i0,\nu_n-\omega)\,F(\omega+i0,\omega+\mu_m,\mu_m) \\
&\cdot\,\Lambda^{-q}(\omega+\mu_m,\nu_n+\mu_m,\nu_n-\omega)\,D_q(\nu_n-\omega) \qquad (14)\\
&+\sum_q \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\,f(\omega)\,\Lambda^q(\nu_n,\omega-i0,\nu_n-\omega)\,F(\omega-i0,\omega+\mu_m,\mu_m) \\
&\cdot\,\Lambda^{-q}(\omega+\mu_m,\nu_n+\mu_m,\nu_n-\omega)\,D_q(\nu_n-\omega) \\
&-\sum_q \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\,f(\omega)\,\Lambda^q(\nu_n,\omega-\mu_m,\nu_n+\mu_m-\omega)\,F(\omega-\mu_m,\omega+i0,\mu_m) \\
&\cdot\,\Lambda^{-q}(\omega+i0,\nu_n+\mu_m,\nu_n+\mu_m-\omega)\,D_q(\nu_n+\mu_m-\omega) \\
&+\sum_q \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\,f(\omega)\,\Lambda^q(\nu_n,\omega-\mu_m,\nu_n+\mu_m-\omega)\,F(\omega-\mu_m,\omega-i0,\mu_m) \\
&\cdot\,\Lambda^{-q}(\omega-i0,\nu_n+\mu_m,\nu_n+\mu_m-\omega)\,D_q(\nu_n+\mu_m-\omega).
\end{aligned}
$$

An Hand dieser Gleichung lassen sich die oben behaupteten analytischen Eigenschaften der Funktion F leicht verifizieren.

Die Gln. (9), (10) und (11) zeigen, daß wir die folgenden Fortsetzungen benötigen:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \nu_n \to E-i0, \quad \nu_n+\mu_m \to E+i0, \quad \mu_m \to +i0 \\
&\text{b)} \quad \nu_n \to E-i0, \quad \nu_n+\mu_m \to E-i0, \quad \mu_m \to +i0.
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

Die Fortsetzung a) führt zu $F^{-+}(E)$, die Fortsetzung b) zu $F^{--}(E)$. Kennzeichnen wir wieder die verschiedenen analytischen Stücke mit oberen Indexvorzeichen, z. B.

$$
\Lambda^q(E+i0,E+\omega-i0,-\omega+i0)=\Lambda^{q\,+\,-\,+}(E,E+\omega,-\omega)
$$

$$
D_q(-\omega\pm i0)=D_q^{\pm}(-\omega)
$$

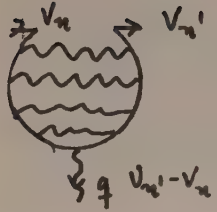

Fig. 6.

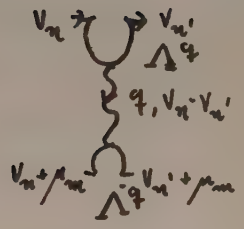

Fig. 7.

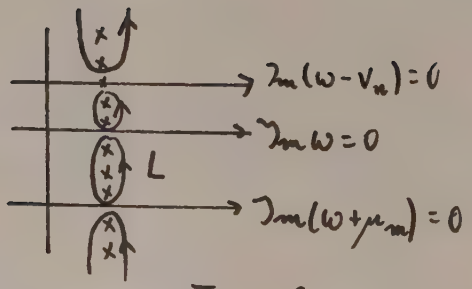

Fig. 8.

usw., so erhalten wir aus Fortsetzung a)

$$
\begin{aligned}
F^{-+}(E) = {} & G^{-}(E) j_k G^{+}(E) \\
& + G^{-}(E) \sum_q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} [f(E+\omega)+n(\omega)] \Lambda^{q---}(E, E+\omega, -\omega) \\
& \cdot F^{-+}(E+\omega) \Lambda^{-q+++}(E+\omega, E, -\omega) G^{+}(E) D_q^{-}(-\omega) \\
& - G^{-}(E) \sum_q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} [f(E+\omega)+n(\omega)] \Lambda^{q--+}(E, E+\omega, -\omega) \\
& \cdot F^{-+}(E+\omega) \Lambda^{-q+++}(E+\omega, E, -\omega) G^{+}(E) D_q^{+}(-\omega) \qquad (16) \\
& + G^{-}(E) \sum_q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} f(E+\omega) \Lambda^{q--+}(E, E+\omega, -\omega) \\
& \cdot F^{--}(E+\omega) \Lambda^{-q-++}(E+\omega, E, -\omega) G^{+}(E) D_q^{+}(-\omega) \\
& - G^{-}(E) \sum_q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} f(E+\omega) \Lambda^{q-+-}(E, E+\omega, -\omega) \\
& \cdot F^{++}(E+\omega) \Lambda^{-q+--}(E+\omega, E, -\omega) G^{+}(E) D_q^{-}(-\omega)
\end{aligned}
$$

und aus der Fortsetzung b)

$$
\begin{aligned}
F^{--}(E) = {} & G^{-}(E) j_k G^{-}(E) \\
& + G^{-}(E) \sum_q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} [f(E+\omega)+n(\omega)] \Lambda^{q---}(E, E+\omega, -\omega) \\
& \cdot F^{--}(E+\omega) \Lambda^{-q---}(E+\omega, E, -\omega) G^{-}(E) D_q^{-}(-\omega) \\
& - G^{-}(E) \sum_q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} n(\omega) \Lambda^{q--+}(E, E+\omega, -\omega) \qquad (17) \\
& \cdot F^{--}(E+\omega) \Lambda^{-q--+}(E+\omega, E, -\omega) G^{-}(E) D_q^{+}(-\omega) \\
& - G^{-}(E) \sum_q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} f(E+\omega) \Lambda^{q-+-}(E, E+\omega, -\omega) \\
& \cdot F^{++}(E+\omega) \Lambda^{-q+--}(E+\omega, E, -\omega) G^{-}(E) D_q^{-}(-\omega).
\end{aligned}
$$

Gln. (16) und (17) bilden ein gekoppeltes System von Transportgleichungen für die Ein-Elektronen-Dichteoperatoren F^{-+} und F^{--}.

5. Transversale Leitfähigkeit

Wir wollen annehmen, daß das Magnetfeld so stark ist, daß wir die Elektron-Phonon-Wechselwirkung als Störung betrachten können. Genauer gesagt, wollen wir die transversale Leitfähigkeit nur bis zur Ordnung $|\Lambda^q|^2$ berechnen.

Die Transportgleichungen für F^{-+} und F^{--} enthalten unbekannte Größen, die Greenfunktionen G und die Wechselwirkungsknoten Λ^q. Natürlich sind diese Größen nicht unabhängig. Vielmehr sind die Greenfunktionen durch die Wechselwirkungsknoten eindeutig bestimmt. Da wir σ_{xx} nur bis zur Ordnung $|\Lambda^q|^2$ berechnen wollen, können wir uns nach (16) und (17) auch in der Bestimmung der Greenfunktionen auf diese Ordnung beschränken. Zur angenäherten Berechnung von G ist die Dysongleichung

$$G^{\pm}(E)=G_0^{\pm}(E)+G_0^{\pm}(E)\Sigma^{\mp}(E)G^{\mp}(E) \tag{18}$$

besonders geeignet. Wir suchen daher nach einer Verknüpfung zwischen dem Selbstenergieoperator

$$\Sigma^{\mp}(E)=\Delta(E)\pm\frac{i}{2}\Gamma(E) \tag{19}$$

und dem Wechselwirkungsknoten Λ^q. ($\Delta(E)$ und $\Gamma(E)$ sind durch die Dispersionsrelationen verknüpft.) Im Anhang A wird gezeigt, daß diese Verknüpfung in unserer Näherung lautet

$$\begin{aligned}\Gamma(E)=\sum_q \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\,[f(E+\omega)+n(\omega)]\,C_q(-\omega)\\ \cdot\Lambda^{q+++}(E,E+\omega,-\omega)\,A_0(E)\,\Lambda^{-q---}(E+\omega,E,-\omega),\end{aligned} \tag{20}$$

wobei $C_q(-\omega)$ die Spektralfunktion zu $D_q(-\omega)$ ist.

Wir sehen also, daß $\Gamma(E)$ proportional $|\Lambda^q|^2$ ist. Aus diesem Grunde können wir uns in (18) auf die erste Iteration

$$G^{\mp}(E)=G_0^{\mp}(E)+G_0^{\mp}(E)\Sigma^{\mp}(E)G_0^{\mp}(E) \tag{21}$$

beschränken.

In unserer Näherung können wir auch die Transportgleichungen (16) und (17) durch Iteration lösen und diese nach dem ersten Schritt abbrechen. Für Gl. (16) bedeutet das z. B., daß wir in den homogenen Gliedern F^{-+} und F^{--} durch die inhomogenen Glieder und jedes G durch ein G_0 ersetzen.

Nach längeren, aber elementaren Rechnungen (die zum Teil ähnlich verlaufen wie die Rechnungen im Teil I, 3. Abschnitt) erhalten wir bis auf ein Restglied (s. später) die Formel

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}=\frac{e^2}{V}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi}\left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right)\Big[&\mathrm{Sp}\{A_0(E)\,X\,\Gamma(E)\,X\}\\ &-2\,\mathrm{Re}\sum_q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\,D_q^-(-\omega)\big(f(E+\omega)+n(\omega)\big)\\ &\cdot\mathrm{Sp}\{A_0(E)\,X\,\Lambda^{q---}(E,E+\omega,-\omega)\\ &\cdot X\,A_0(E+\omega)\,\Lambda^{-q+++}(E+\omega,E,-\omega)\}\Big].\end{aligned} \tag{22}$$

Das erste Glied in der eckigen Klammer rührt von den inhomogenen Gliedern der Transportgleichungen (16) und (17) her und ist daher der Beitrag der Hartree-Fock-Näherung. Mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned}
&[\Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega)]^{\dagger} = \Lambda^{-q---}(E+\omega, E, -\omega);\\
&[\Lambda^{q--+}(E, E+\omega, -\omega)]^{\dagger} = \Lambda^{-q++-}(E+\omega, E, -\omega)\\
&[\Lambda^{q++-}(E, E+\omega, -\omega)]^{\dagger} = \Lambda^{-q--+}(E+\omega, E, -\omega);\\
&[\Lambda^{q---}(E, E+\omega, -\omega)]^{\dagger} = \Lambda^{-q+++}(E+\omega, E, -\omega)
\end{aligned} \tag{23}$$

und

$$\Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega) = \Lambda^{q++-}(E, E+\omega, -\omega), \tag{24}$$

$$\Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega) = \Lambda^{q+++}(E+\omega, E, -\omega), \tag{25}$$

die im Anhang B begründet werden, läßt sich (22) in die Form

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{V}\beta \sum_{q,\alpha,\alpha'} f(\varepsilon_\alpha)(1-f(\varepsilon_{\alpha'}))\, n(\hbar\omega_q)(X-X')^2 w_{\alpha\alpha' q} \tag{26}$$

bringen, wobei

$$w_{\alpha\alpha' q} = \frac{2\pi}{\hbar} |\Lambda^{q+++}_{\alpha\alpha'}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha'}, \varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'})|^2 \delta(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'} + \hbar\omega_q) \tag{27}$$

eine Übergangswahrscheinlichkeit höherer Ordnung ist.

Die Formel (26) ist vom Titeicaschen Typ. Das oben erwähnte Restglied ist von höherer Ordnung und daher zu vernachlässigen. Dies sieht man sofort ein, wenn man sich erinnert, daß σ_{xx} in der Bornschen Näherung ohne jeden Zusatz durch die Titeica-Formel gegeben ist. Deshalb muß das Restglied mit $|\Lambda^q|^4$ beginnen.

Wir wollen noch zeigen, daß die Amplituden der oszillierenden transversalen Leitfähigkeit durch die Übergangswahrscheinlichkeiten höherer Ordnung bestimmt sind. Gl. (26) mit (27) läßt sich nach Anhang B umschreiben:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} = \frac{e^2}{V} \sum_{q,\alpha,\alpha'} \int_{-\infty}^{+\infty} dE\, \delta(E-\varepsilon_\alpha) \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) [f(E+\hbar\omega_q) + n(\hbar\omega_q)]\\
\cdot (X-X')^2 w^0_{\alpha\alpha' q}(E)\, |H^{++}(E+\hbar\omega_q, E)|^2,
\end{aligned} \tag{28}$$

wobei $w^0_{\alpha\alpha'}(E)$ die Übergangswahrscheinlichkeit in der Bornschen Näherung ist. Für tiefe Temperaturen können wir in guter Näherung

$$-\frac{\partial f}{\partial E} = \delta(E-\zeta) \tag{29}$$

setzen, wobei ζ die Fermienergie ist. Wir wählen jetzt B so, daß

$$\zeta = (N+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega \tag{30}$$

gilt. Nun hat der Faktor $|H^{++}(E+\hbar\omega_q, E)|^2$ gerade bei den Werten

$$E=(N+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega \tag{31}$$

Nullstellen erster Ordnung

$$|H^{++}(E+\hbar\omega_q, E)|^2=\text{konst.}\times[E-(N+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega], \quad E\to(N+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega. \tag{32}$$

Daher liefert (28) im Grenzfall sehr tiefer Temperaturen $\sigma_{xx}=0$. Es ergibt sich für σ_{xx} ein völlig anderes Verhalten, wenn wir in (28) zur Bornschen Näherung übergehen, d.h. $|H^{++}(E+\hbar\omega_q, E)|^2=1$ setzen. Dann wird nämlich der Faktor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_z\,\delta(E-\varepsilon_\alpha)=\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\,\frac{1}{\sqrt{E-(N+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega}}, \tag{33}$$

der für $E=\xi=(N+\tfrac{1}{2})\hbar\Omega$ singulär wird, nicht durch die Nullstelle kompensiert, und die Amplituden nehmen unrealistisch große Werte an.

6. Longitudinale Leitfähigkeit

Im longitudinalen Fall sind im Rahmen unserer Näherung in Gl. (16) die Glieder mit F^{--} und F^{++} und in der Leitfähigkeitsformel (11) F^{--} fortzulassen. (Wir verweisen auf die Überlegungen im Teil I, 4. Abschnitt.) Es folgt dann unter Beachtung von (23) bis (25) die Formel

$$\begin{aligned} F^{-+}_{\alpha\alpha}(E)=&-e(v_z)_\alpha\frac{A_\alpha(E)}{\Gamma_\alpha(E)}+\frac{A_\alpha(E)}{\Gamma_\alpha(E)}\sum_{q,\alpha'}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,[f(E+\omega)+n(\omega)]\\ &\cdot C_q(-\omega)\,\Lambda^{q\,---}_{\alpha\alpha'}(E, E+\omega, -\omega)\,F^{-+}_{\alpha'\alpha'}(E+\omega)\\ &\cdot \Lambda^{-q\,+++}_{\alpha'\alpha}(E+\omega, E, -\omega). \end{aligned} \tag{37}$$

Setzen wir jetzt

$$F^{-+}_{\alpha\alpha}(E)=\frac{1}{\hbar}\,A_{0\alpha}(E)\,\Phi_\alpha(\varepsilon_\alpha), \tag{35}$$

beachten (20) und die Tatsache, daß in unserer Näherung die Spektralfunktion $C_q(-\omega)$ δ-förmig ist und $A_\alpha(E)$ durch $A_{0\alpha}(E)$ ersetzt werden kann, so erhalten wir für $\Phi_\alpha(\varepsilon_\alpha)$ eine Gleichung vom Boltzmann-Blochschen Typ

$$e(v_z)_\alpha=\sum_{q,\alpha'}[f(\varepsilon_{\alpha'})+n(\hbar\omega_q)]\,w_{\alpha\alpha'q}[\Phi_{\alpha'}(\varepsilon_{\alpha'})-\Phi_\alpha(\varepsilon_\alpha)] \tag{36}$$

mit den Übergangswahrscheinlichkeiten (27). Die Leitfähigkeit ist gegeben durch

$$\sigma_{zz}=\frac{2\pi}{V}\sum_\alpha\left(-\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_\alpha}\right)(-e\,v_z)_\alpha\,\Phi_\alpha(\varepsilon_\alpha). \tag{37}$$

Auch in diesem longitudinalen Fall sind die Amplituden der Oszillationen durch die Streuprozesse höherer Ordnung bestimmt.

Der Verfasser ist Herrn Prof. Dr. J. HAJDU für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für fördernde Diskussionen und viele Ratschläge bei der Formulierung sehr dankbar. Er dankt auch Herrn Prof. Dr. G. LÜDERS für sein Interesse sowie für kritische Bemerkungen und Herrn Dr. H. KEITER für zahlreiche Diskussionen und wertvolle Hinweise.

Anhang A

In diesem Anhang wollen wir die Beziehung (20) begründen. Nach einem Verfahren von DZYALOSHINSKI[4] läßt sich der Beitrag eines beliebigen zeitgeordneten Graphen zu $\Sigma(E)$ (der analytischen Fortsetzung des Selbstenergieoperators $\Sigma(\nu_n)$ unmittelbar angeben. Dazu zeichnen wir den entsprechenden Graphen für alle möglichen Zeitordnungen seiner Wechselwirkungslinien und seiner äußeren Knoten auf; die Zeit verläuft vertikal. Die äußeren Linien tragen die Frequenz ν_n, einen Durchlaufsinn und werden vertikal gezeichnet. Die inneren Elektronenlinien repräsentieren die Spektralfunktionen $A(\omega_i)$, die Phononlinien die Spektralfunktionen $C_q(\eta_i)$. Nun legen wir zwischen die äußeren und inneren Knoten horizontale Schnitte (s. Fig. 9 für zwei Zeitordnungen). Jeder dieser Schnitte ergibt im Nenner einen Faktor, der aus der Summe der Frequenzen der zerschnittenen Linien besteht. Dabei bekommt die Frequenz einer mit der Zeit laufenden Linie ein positives Vorzeichen und ein negatives im entgegengesetzten Fall. Schließlich liefert jede mit der Zeit laufende Linie einen Faktor $f^+(\omega_i)=f(-\omega_i)$ (Elektronenlinie) bzw. $(1+n(\eta i))$ (Phononlinie), und jede in entgegengesetzter Richtung laufende Linie $-f(\omega_i)$, bzw. $n(\eta i)$.

Als Beispiel schreiben wir die Beiträge der beiden Zeitordnungen in Fig. 9 auf: (frequenzunabhängige Größen und Summationen haben wir einfachheitshalber fortgelassen):

$$\Sigma^{(a)}(\nu_n)\sim\int d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3\, d\eta_1\, d\eta_2\, A(\omega_1)\, A(\omega_2)\, A(\omega_3)\, C_q(\eta_1)\, C_{q'}(\eta_2)$$
$$\cdot\frac{f^+(\omega_1)\, f^+(\omega_2)\, f^+(\omega_3)(1+n(\eta_1))(1+n(\eta_2))}{(-\nu_n+\eta_1+\omega_1)(-\nu_n+\eta_1+\omega_2+\eta_2)(-\nu_n+\omega_3+\eta_2)},$$

$$\Sigma^{(b)}(\nu_n)\sim\int d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3\, d\eta_1\, d\eta_2\, A(\omega_1)\, A(\omega_2)\, A(\omega_3)\, C_q(\eta_1)\, C_{q'}(\eta_2)$$
$$\cdot\frac{f^+(\omega_1)\, f^+(\omega_2)(-f(\omega_3))(1+n(\eta_1))\, n(\eta_2)}{(-\nu_n+\eta_1+\omega_1)(-\nu_n+\eta_1+\omega_1-\eta_2-\omega_3+\nu_n)(-\nu_n+\eta_1+\omega_2-\omega_3+\nu_n)}.$$

Wir sehen, daß diese Formulierung zur analytischen Fortsetzung $\Sigma(\nu_n\to E\pm i0)$ und damit zur Berechnung des Sprunges $\Gamma(E)=\frac{1}{i}(\Sigma^-(E)-\Sigma^+(E))$ über die reelle Achse besonders geeignet ist. Denn verwenden wir die Identitäten

$$\frac{1}{i}\left(\frac{1}{x-i0}-\frac{1}{x+i0}\right)=2\pi\,\delta(x)$$

$$\frac{1}{i}\left(\frac{1}{x-i0}\,\frac{1}{y-i0}-\frac{1}{x+i0}\,\frac{1}{y+i0}\right)=2\pi\,\delta(x)\,\frac{1}{y-i0}+\frac{1}{x+i0}\,2\pi\,\delta(y)$$

$$\frac{1}{i}\left(\frac{1}{x-i0}\,\frac{1}{y-i0}\,\frac{1}{z-i0}-\frac{1}{x+i0}\,\frac{1}{y+i0}\,\frac{1}{z+i0}\right)$$
$$=2\pi\,\delta(x)\,\frac{1}{y-i0}\,\frac{1}{z-i0}+\frac{1}{x+i0}\,2\pi\,\delta(y)\,\frac{1}{z-i0}+\frac{1}{x+i0}\,\frac{1}{y+i0}\,2\pi\,\delta(z)$$

[4] DZYALOSHINSKI, I.E.: Soviet Phys. JETP **15**, 778 (1962).

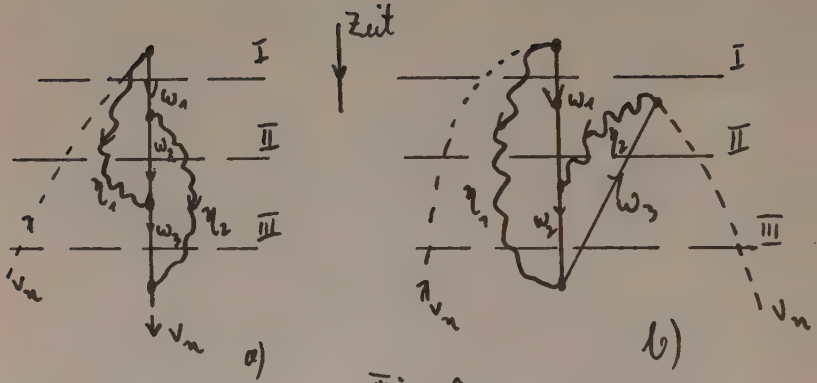

Fig. 9.

usw., so zeigt sich, daß jeder Schnitt, der einen Graphen in zwei Teile mit je einem äußeren Knoten zerlegt, einen additiven Beitrag zu $\Gamma(E)$ liefert. Wir wollen nun nicht die Beiträge von allen Schnitten aufsummieren, sondern nur solche Wechselwirkungsknoten mit nur zwei äußeren Elektronenlinien und nur einer äußeren Phononlinie berücksichtigen. Das heißt, es werden nur Schnitte beachtet, die eine Phononlinie und eine Elektronlinie zerschneiden (Fig. 9a I und III, Fig. 9b I).
Die Beiträge dieser Schnitte können wir leicht addieren, indem wir nur noch die Linien aufzeichnen, die gerade zerschnitten werden, und den Rest in den Knoten verschmelzen, Fig. 10. Aus den obigen Beispielen und Identitäten geht hervor, daß wir gerade die analytischen Stücke Λ^{q+++} bzw. Λ^{-q---} erhalten. Beachten wir die beiden möglichen Zeitordnungen (Fig. 10) so erhalten wir in unserer Näherung

$$\Gamma(E)=\frac{1}{i}\left(\Sigma(E-i0)-\Sigma(E+i0)\right)$$

$$=\sum_q \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\eta_1}{2\pi}\Lambda^{q+++}(E,\omega_1,\eta_1)\,A_0(\omega_1)\,\Lambda^{-q---}(\omega_1,E,\eta_1)\,C_q(\eta_1)$$

$$\cdot\left\{\frac{f^+(\omega_1)(1+n(\eta_1))}{-(E-i0)+\omega_1+\eta_1}+\frac{-f(\omega_1)\,n(\eta_1)}{E-i0-\omega_1-\eta_1}\right.$$

$$\left.-\frac{f^+(\omega_1)(1+n(\eta_1))}{-(E+i0)+\omega_1+\eta_1}-\frac{-f(\omega_1)\,n(\eta_1)}{E+i0-\omega_1-\eta_1}\right\}$$

also

$$\Gamma(E)=\sum_q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left[f(E+\omega)+n(\omega)\right]\cdot$$

$$\cdot\,\Lambda^{q+++}(E,E+\omega,-\omega)\,A_0(E+\omega)\,\Lambda^{-q---}(E+\omega,E,-\omega)\,C_q(-\omega).$$

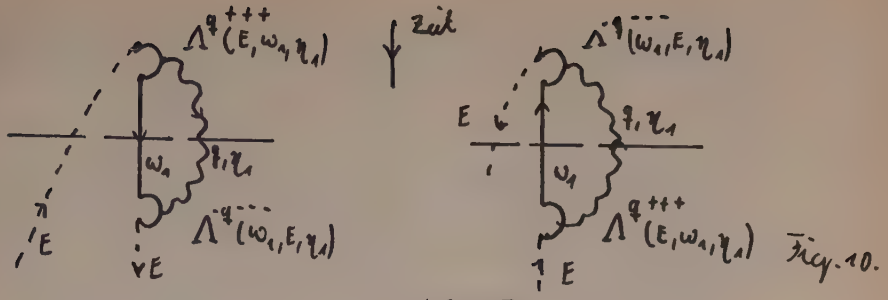

Fig. 10.

Anhang B

Wir wollen in diesem Anhang die Knotenfunktionen $\Lambda^q(E, E+\omega, -\omega)$ und $\Lambda^{-q}(E+\omega, E, -\omega)$ abschätzen. Der Wechselwirkungsknoten Λ^q genügt einer ähnlichen Gleichung wie die Knotenfunktion F, Fig. 4,

Wir wollen für den irreduziblen Anteil I die in Fig. 5 gegebene niedrigste Näherung benutzen. Dann ist nach Fig. 11

$$\Lambda^q(\nu_n, \nu_n-\mu_m, \mu_m) \tag{B.1}$$
$$=\lambda^q+\frac{1}{\beta}\sum_{q',n'}\lambda^{q'}G(\nu_n)\,\Lambda^q(\nu_{n'}, \nu_{n'}-\mu_m, \mu_m)\,G(\nu_{n'}-\mu_m)\,\lambda^{-q'}D_{q'}(\nu_n-\nu_{n'}),$$

$$D_{q'}(\nu_n-\nu_{n'})=\sum_{\pm}\frac{1}{\hbar\omega_{q'}\pm(\nu_n-\nu_{n'})}. \tag{B.2}$$

Durch Multiplikation mit $\pm\left(-\frac{\beta}{2\pi i}\right)[f^+(Z)+n(\hbar\omega_{q'})]$* läßt sich die Summation über n' wieder in eine Integration längs L, Fig. 12, umwandeln, denn dieser Faktor liefert für die Pole der Phonon-Greenfunktion gerade die Residuen Null.

* $f^{\pm}(Z)\equiv f(\pm Z)$.

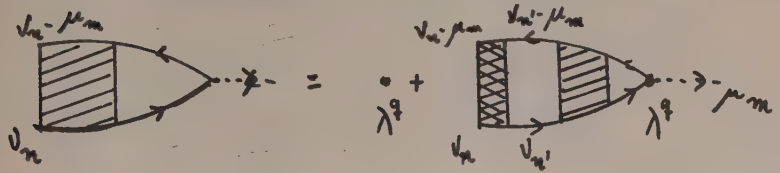

Fig. 11.

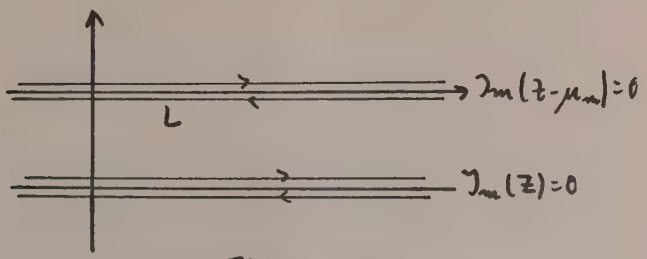

Fig. 12.

Nach Verschiebung des Integrationsweges auf die reelle Achse können wir die analytischen Fortsetzungen

$$\begin{array}{lll} \nu_n \to E+i0 & \nu_n \to E+i0 & \nu_n \to E-i0 \\ \nu_n-\mu_m \to E+\omega+i0 & \nu_n-\mu_m \to E+\omega-i0 & \nu_n-\mu_m \to E+\omega-i0 \\ \mu_m \to -\omega+i0, & \mu_m \to -\omega+i0, & \mu_m \to -\omega+i0 \end{array}$$

ausführen, die der Reihe nach $\Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega)$, $\Lambda^{q+--}(E, E+\omega, -\omega)$, $\Lambda^{q---}(E, E+\omega, -\omega)$ ergeben. Dementsprechend erhalten wir drei gekoppelte Integralgleichungen:

$$\begin{aligned} \Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega) - \lambda^q = & -\sum_{q', \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f^{\mp}(z+\omega)+n(\hbar\omega_{q'})}{E-z\pm\hbar\omega_{q'}+i0} \\ & \cdot \lambda^{q'} G^+(z) \Lambda^{q+++}(z, z+\omega, -\omega) G^+(z+\omega) \lambda^{-q'} \\ & + \sum_{q', \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f^{\mp}(z+\omega)-f^{\mp}(z)}{E-z\pm\hbar\omega_{q'}+i0} \\ & \cdot \lambda^{q'} G^+(z) \Lambda^{q+--}(z, z+\omega, -\omega) G^-(z+\omega) \lambda^{-q'} \\ & + \sum_{q', \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f^{\mp}(z)+n(\hbar\omega_{q'})}{E-z\pm\hbar\omega_{q'}+i0} \\ & \cdot \lambda^{q'} G^-(z) \Lambda^{q---}(z, z+\omega, -\omega) G^-(z+\omega) \lambda^{-q} \end{aligned} \tag{B.3}$$

und zwei weitere ähnliche Gleichungen. Für die drei übrigen analytischen Stücke $\Lambda^{q++-}(E, E+\omega, -\omega)$, $\Lambda^{q-+-}(E, E+\omega, -\omega)$, $\Lambda^{q--+}(E, E+\omega, -\omega)$ der Knotenfunktion Λ^q, sowie für die sechs analytischen Stücke von Λ^{-q} lassen sich ebenso Integralgleichungen aufstellen. Es folgen dann die Beziehungen:

$$\begin{aligned} [\Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega)]^{\dagger} &= \Lambda^{-q---}(E+\omega, E, -\omega) \\ [\Lambda^{q--+}(E, E+\omega, -\omega)]^{\dagger} &= \Lambda^{-q++-}(E+\omega, E, -\omega) \\ [\Lambda^{q++-}(E, E+\omega, -\omega)]^{\dagger} &= \Lambda^{-q--+}(E+\omega, E, -\omega) \\ [\Lambda^{q---}(E, E+\omega, -\omega)]^{\dagger} &= \Lambda^{-q+++}(E+\omega, E, -\omega). \end{aligned} \tag{B.4}$$

Im Grenzfall $\omega_{q'} \to 0$ (elastische Näherung) läßt sich die Summation $\sum_{\pm}$ auf der rechten Seite von (B3) ausführen

$$\begin{aligned} \Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega) - \lambda^q = & -\sum_{q'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{E-z+i0} \\ & \cdot \lambda^{q'} G^+(z) \Lambda^{q+++}(z, z+\omega, -\omega) G^+(z+\omega) \lambda^{-q'} \\ & + \sum_{q'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{E-z+i0} \\ & \cdot \lambda^{q'} G^-(z) \Lambda^{q--+}(z, z+\omega, -\omega) G^-(z+\omega) \lambda^{-q'}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite von (B5) verschwindet, da der Integrant in der unteren z-Halbebene eine analytische Funktion ist. Im ersten Glied schließen wir den Integrationsweg in der oberen Halbebene, so daß nur der Pol bei $z=E+i0$ einen

Beitrag liefert

$$\Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega)-\lambda^q = \sum_{q'} \lambda^{q'} G^+(E)\, \Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega)\, G^+(E+\omega)\, \lambda^{-q'}. \tag{B.6}$$

Für $\Lambda^{q++-}(E, E+\omega, -\omega)$ ergibt sich mit dieser Näherung die gleiche Gleichung, woraus wir auf

$$\Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega)=\Lambda^{q++-}(E, E+\omega, -\omega) \tag{B.7}$$

schließen. Zugleich sehen wir, daß diese Größen nur von E und $E+\omega$ abhängen und

$$\Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega)=\Lambda^{q+++}(E+\omega, E, -\omega) \tag{B.8}$$

gilt.

Um eine Abschätzung zu erhalten, ersetzen wir auf der rechten Seite von (B.6) die Greenfunktionen G durch die „ungestörten" Funktionen G_0 und gehen zur Ortsdarstellung über:

$$G^+(r, r'; E)=G_0^+(r, r'; E) = \sum_\alpha \psi_\alpha(r)\psi_\alpha^*(r')\, G_{0\alpha}^+(E)=\sum_\alpha \frac{\psi_\alpha(r)\psi_\alpha^*(r')}{E-\varepsilon_\alpha+i0}, \tag{B.9}$$

$$\lambda^q(r, r')=c(|q|)\, e^{i q r}\, \delta(r-r'). \tag{B.10}$$

Gl. (B.9) zusammen mit (B.7) legt den Ansatz

$$\Lambda^{q+++}(E, E+\omega, -\omega)=\lambda^q H^{++}(E, E+\omega) \tag{B.11}$$

nahe, wobei H eine c-Zahlfunktion ist. Setzen wir (B.11) sowie die Ausdrücke (B.9) und (B.10) in (B.6) ein, integrieren über Ortsvariable und summieren über Quantenzahlen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{i q r}\delta(r-r')[H^{++}(E, E+\omega)-1] = {} & \frac{V}{(2\pi)^3}\frac{|c(|q|)|^2}{|q|(2\pi l)^2}\, e^{i q r'} \sum_{N, N'=0}^{\infty} \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z\, G_{0, N, k_z}^+(E)\, G_{0, N', k_z-q_z}^+(E+\omega)\, H^{++}(E, E+\omega) \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, \varphi_N(v+\tfrac{1}{2}l^2 q_y)\, e^{i q_x v}\, \varphi_{N'}(v-\tfrac{1}{2}l^2 q_y) \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} du\, \varphi_N\big(u+\tfrac{1}{2}[l^2 q_y+x-x']\big)\, e^{-i u \frac{1}{l^2}[l^2 q_x+y'-y]} \\ & \cdot \varphi_{N'}\big(u-\tfrac{1}{2}[l^2 q_y+x-x']\big)\, e^{\frac{i}{2}[q_x(x-x')+q_y(y-y')]}\, e^{i k_z(z-z')} \\ & \cdot e^{-\frac{i}{2l^2}(x+x')(y-y')} \int_{|q'|\leq q_m} |q'|\, e^{i q'(r-r')}\, d^3 q'. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Hierbei ist $l=\sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}}$ die magnetische Länge. Da q_m und k_F von der gleichen Größenordnung sind, ist das letzte Integral in (B.12) für $q \ll k_Z$ und $k_F \ll k_F$ eine schnellveränderliche Funktion im Vergleich zum Faktor $e^{\frac{i}{2}[q_x(x-x')+q_y(y-y')]}\, e^{i k_z(z-z')}$ und für hinreichend schwache Magnetfelder auch im Vergleich zum dritten Integral und zum Faktor $e^{-\frac{i}{2l^2}(x-x')(y-y')}$. Sind diese Bedingungen erfüllt, so können wir

die q'-Integration bis unendlich erstrecken und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |q'|\, e^{i q'(r-r')}\, d^3 q' = \bar{q}(2\pi)^3\, \delta(r-r') \tag{B.13}$$

setzen. Wir sehen, daß damit unser Ansatz bestätigt ist und

$$\begin{aligned} H^{++}(E, E+\omega) - 1 = {} & \frac{V}{(2\pi l)^2} \left|c(|q|)\right|^2 \frac{\bar{q}}{|q|}\, H^{++}(E, E+\omega) \\ & \cdot \sum_{N, N'=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z\, G^{+}_{0\,N, k_z}(E) \\ & \cdot G^{+}_{0\,N', k_z - q_z}(E+\omega)\, |(\rho_\perp)_{N N'}|^2 \end{aligned} \tag{B.14}$$

gilt, mit

$$\begin{aligned} (\rho_{q\perp})_{N, N'} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, \varphi_N(v + \tfrac{1}{2} l^2 q_y)\, e^{i q_x v}\, \varphi_{N'}(v - \tfrac{1}{2} l^2 q_y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, \varphi_N(v)\, e^{i q_\perp v}\, \varphi_{N'}(v), \qquad q_\perp = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}\,. \end{aligned} \tag{B.15}$$

Die Annahme schwacher Magnetfelder sehen wir nicht als eine wesentliche Einschränkung an, weil wir hier nur an der Nullstellenverteilung von $H(E, E+\omega)$ zwecks einer Abschätzung interessiert sind.

Nun können wir die algebraische Gleichung (B.14) für $H^{++}(E, E+\omega)$ leicht lösen. Integrieren wir noch über k_z, so folgt

$$\begin{aligned} H^{++}(E, E+\omega) = \Bigg[1 - {} & \frac{3\pi^2 i}{16\sqrt{2}}\, \frac{c^2}{\sqrt{\hbar\Omega E_F^3}}\, \frac{\hbar \bar{q}}{MS} \\ & \cdot \sum_{N, N'=0}^{\infty} |(\rho_{q\perp})_{N N'}|^2\, S \Bigg]^{-1} \end{aligned} \tag{B.16}$$

mit

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{1}{\left(\frac{\hbar q_z}{2m\hbar\Omega}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{E}{\hbar\Omega} - (N+\frac{1}{2})} + \sqrt{\frac{E+\omega}{\hbar\Omega} - (N'+\frac{1}{2})}\right)^2} \\ & \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{E}{\hbar\Omega} - (N+\frac{1}{2})}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{E+\omega}{\hbar\Omega} - (N'+\frac{1}{2})}} \right] \end{aligned}$$

und der Verabredung $\sqrt{a} = {}_{+}\sqrt{a}$ für $a > 0$ und $\sqrt{a} = i\,{}_{+}\sqrt{|a|}$ für $a < 0$. Man sieht, daß die Singularitäten von S zu Nullstellen von $H^{++}(E, E+\omega)$ führen.

LEBENSLAUF

Eike Bangert wurde am 9. Mai 1937 in Hannover geboren. Er besuchte das mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium in Schwerte/Westf. und legte dort 1959 die Reifeprüfung ab. Seither studiert er an der Universität Göttingen Physik. Im Herbst 1963 wurde er Mitglied des Instituts für Theoretische Physik, schrieb unter Anleitung von Herrn Professor Hund seine Diplomarbeit und bestand im November 1964 die mündliche Diplomprüfung. Herr Professor Hajdu führte ihn anschließend in die Probleme der elektrischen Leitfähigkeit in Magnetfeldern ein.

Für seine Ausbildung möchte er seinen Lehrern Prof. J. Hajdu, Prof. F. Hund und Prof. G. Lüders danken. Ebenfalls ist er den Professoren M. Deuring, A. Flammenfeld, O. Glemser, R. Hilsch, W. Maak, E. Meyer und W. Tollmien zu Dank verpflichtet.